

Розробка моделей програмного польоту для розрахунку траєкторій при проектуванні тактичних і зенітних керованих ракет

А. М. Чубаров

Розроблено ряд моделей програмного польоту, призначених для проведення розрахунків з оптимізації траєкторій при проектуванні тактичних і зенітних керованих ракет. Розроблені моделі засновані на визначенні взаємопов'язаних програмних значень висоти і кута нахилу траєкторії польоту в залежності від дальності, які мають між собою диференційний зв'язок. Поєднання програм висоти польоту та кута нахилу траєкторії дозволяє змодельовувати стійкий політ керованої ракети у розрахункову кінцеву точку із використанням методів пропорційного керування.

За допомогою оцінки якості апроксимації розробленими моделями траєкторій польоту зенітних керованих ракет, отриманих із застосуванням інших відомих моделей, показана хороша відповідність розроблених моделей фізиці польоту. Отримана похибка апроксимації складає менше 5 %, що говорить про хорошу відповідність розроблених моделей фізиці польоту.

За допомогою проведення оптимізації траєкторій польоту зенітної керованої ракети доведені відповідність розроблених моделей програмного польоту цільовому призначенню і перевага над найбільш розповсюдженими відовими моделями. У більшості розглянутих розрахункових випадків отримано покращення значення цільової функції до 2,9 %. Оптимізація траєкторій проводилась за допомогою генетичного алгоритму.

Розроблені моделі мають простий алгебраїчний вигляд і невелику кількість управляючих параметрів, представлені у готовій для застосування формі і не потребують доопрацювання під конкретну задачу. Це дозволяє без особливих витрат часу впровадити їх у практику проектування для пришвидшення розрахунків оптимальних проектних параметрів та оптимальних траєкторій польоту тактичних і зенітних керованих ракет.

Ключові слова: ракета, модель програмного польоту, траєкторія польоту, оптимізація, оптимальна траєкторія, розрахунок.

1. Вступ

Зенітна керована ракета (ЗКР) – ракета класу земля-повітря (Surface-to-Air Missile), що застосовується у складі зенітного ракетного комплексу і призначена для ураження повітряних цілей [1].

Тактична ракета (ТР) – різновид балістичних ракет (Tactical Ballistic Missile), призначених для ураження цілей безпосередньо в області воєнних дій [2].

Практика проектування ТР і ЗКР показує, що вибір оптимальних опорних траєкторій в процесі визначення проектних параметрів (ПП) ракет даних класів є вкрай важливим.

Крім того, задача розрахунку оптимальних траєкторій є самостійною важливою задачею під час розробки літальних апаратів (ЛА).

ТР і ЗКР, як об'єкти проектування об'єднує те, що політ даних ракет проходить у щільних шарах атмосфери по аеробалістичним траєкторіям. Чисто балістичні траєкторії для таких ракет не є оптимальними, так як при польоті по таким траєкторіям збільшується довжина шляху, а, відповідно, і час польоту. Спрямлення траєкторій, на протигагу балістичним, призводить до великих втрат швидкості через аеродинамічний опір.

Побудова ефективних методів оптимізації ПП ТР і ЗКР з одночасним урахуванням оптимальних траєкторій польоту є актуальною задачею. Вирішення цієї задачі дозволить значно пришвидшити процес проектування ТР і ЗКР. Для вирішення задачі такого типу необхідні аналітичні способи задання різноманітних траєкторій – моделі програмного польоту, варіюючи управляючими параметрами яких проводиться пошук оптимальної траєкторії польоту.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

У рамках класичного проектування ЛА початкові ПП оцінюються на основі попереднього досвіду проектування та (або) аналізу аналогів, після чого проводяться балістичні розрахунки, на основі результатів яких ПП уточнюються [3]. Як правило, ці дві задачі, через свою складність, вирішуються різними спеціалістами. Процес вирішення цих задач часто є у значній мірі творчим, замість формалізованого. Крім того, для отримання прийняттого результату може знадобитися декілька таких ітерацій, що значно затягує процес розробки технічних пропозицій та (або) аванпроектів.

У проектуванні ракетної техніки широко застосовується системний підхід [3]. З точки зору системного підходу задача вибору ПП має підпорядковуватись (вирішуватись у рамках) задачі ефективного польоту у кінцеву точку призначення (КТП). КТП (predicted intercept point (PIP)) – представляє собою розрахункову точку зустрічі з ціллю або початку термінального наведення (terminal guidance). Політ до КТП у англійській літературі називають терміном «Mid-course guidance» – наведення на маршовій та середній ділянках траєкторії до моменту початку самонаведення.

Оскільки параметри траєкторій польоту залежать від ПП ракети і навпаки, то розрахунок оптимальних ПП і оптимальної траєкторії польоту ракети має проводитись одночасно у рамках однієї комплексної задачі.

Така задача є оптимізаційною – необхідно підібрати такі ПП і таку траєкторію польоту ракети, які забезпечать екстремум одного або декількох критеріїв оптимальності при виконанні заданих обмежень. Вирішення такої задачі має бути формалізованим, оскільки неможливо довести оптимальність рішення, отриманого за допомогою тривіального (або частково тривіального) підходу, так як оптимізаційні задачі не можуть бути тривіальними за визначенням.

Задача розрахунку оптимальної траєкторії в свою чергу є задачею оптимального управління з вибору найкращої з точки зору деякого критерію (або кількох критеріїв) програми управління для досягнення необхідних кінцевих параметрів польоту ракети. Задачі даного класу у загальному випадку включають [4]:

- опис об'єкту керування – набір характеристик та диференційні рівняння руху ракети, які широко відомі і не є предметом даної роботи;
- початкові і необхідні кінцеві характеристики об'єкту керування;
- множину допустимих управлінь яку, власне, і задають моделі програмного польоту, розробці яких присвячена дана робота;
- критерії оптимізації – дають кількісну оцінку ефективності керування (найчастіше розглядають максимальну дальність польоту, мінімальний час польоту у КТП, максимальну швидкість у КТП).

У [5] проведено аналіз підходів до задання траєкторій при оптимізації і виділено дві групи методів:

- прямі методи – засновані на параметризації закону управління, перетворюючи задачу оптимального управління на задачу оптимізації управляючих параметрів закону;
- непрямі методи – ґрунтуються, як правило, на аналітичному вирішенні задач наведення ракети на рухому ціль або КТП методами теорії оптимального управління.

Прямі методи зменшують складність програмної реалізації розрахунків, а тому є більш прийнятними на етапах проектування [5]. При розробці непрямих методів задача наведення потребує значних спрощень для забезпечення отримання аналітичного рішення [5, 6]. Це призводить до того, що конкретні непрямі методи доцільно застосовувати лише у відповідних дуельних ситуаціях. Тому для більш глобального аналізу на початкових етапах проектування раціонально використовувати прямі методи.

У [7] наведена класифікація моделей програмного польоту ЛА, які відрізняються первинним параметром руху, для якого задається програма, і на основі якого розраховується значення управляючого кута атаки. Саме кут атаки безпосередньо впливає на величини аеродинамічних сил, що діють на ЛА при польоті в атмосфері і таким чином визначає траєкторію його польоту. Таким чином найпростішим прямим методом керування польотом ракети в атмосфері є безпосереднє задання закону зміни кута атаки, наприклад, в залежності від часу [5]. Крім того, такий спосіб є найшвидшим з точки зору часу інтегрування системи диференційних рівнянь руху програмними засобами за допомогою числових методів. Цим способом часто користуються на практиці, але він має ряд суттєвих недоліків, які ускладнюють його практичне застосування:

- задача попадання у КТП автоматично не вирішується, що призводить до додаткової необхідності вирішення або крайової задачі, або задачі мінімізації кінцевого промаху, що значно збільшує час розрахунку, так як даний процес також є ітераційним;
- значення цільових функцій надчутливі до зміни будь-якого управляючого параметра закону зміни кута атаки, що значно ускладнює оптимізаційний розрахунок;
- розрахована для одного набору характеристик ЛА та умов польоту програма зміни кута атаки для іншого набору не підходить.

Вказані недоліки призводять до наступних наслідків:

- на розрахунок необхідних траєкторій витрачається забагато часу;

– для подальших досліджень (керованості, стійкості, розробки систем керування) у якості первинних програмних параметрів все одно приймаються інші параметри, розраховані в процесі моделювання польоту за програмою кута атаки (наприклад, кути орієнтації ЛА);

– необхідність вирішення крайової задачі або задачі мінімізації кінцевого промаху робить даний метод непрактичним для використання у зв'язці з розрахунком оптимальних ПП ЛА.

Всі наведені у [7] моделі програмного польоту ЛА мають один суттєвий недолік. В процесі моделювання необхідні значення аеродинамічних сил у певний момент часу з тих чи інших причин можуть бути не реалізовані. У такому випадку ЛА безповоротно відхилиться від програмної траєкторії через те, що необхідні поточні значення кута атаки не адаптуються до зміни умов польоту.

Існує два основних способи вирішення цієї проблеми:

1) застосування методів самонаведення (непрямих методів);

2) визначення при застосуванні прямих методів необхідного значення кута атаки на основі первинного управляючого параметра за допомогою методів пропорційного керування, широко відомих з теорії автоматизованого керування [8].

Метод пропорційного наведення (МПН) є методом самонаведення і є класичним для наведення ЗКР як на рухому (у загальному випадку), так і на нерухому ціль. МПН може використовувались і як метод термінального наведення, і як метод, що повністю визначає траєкторію польоту.

МПН широко застосовується у багатьох сучасних розробках і надзвичайно широко описаний у літературі [3, 7, 9]. Навіть дослідження останніх років пов'язані з його покращенням, модифікаціями і розробкою оптимальних систем керування на його базі [10, 11].

Перевагою МПН є автоматичне вирішення задачі попадання у кінцеву точку (в загальному випадку, з ненульовим, але допустимим промахом), незалежно від зміни умов польоту, якщо для цього вистачає енергетичних та маневрених можливостей ЛА.

Суттєвим недоліком є те, що фізична суть МПН полягає у зведенні до нуля кутової швидкості обертання лінії ЛА-ціль (або ЛА-кінцева точка). Відповідно, до нуля наближається і кутова швидкість обертання вектору швидкості ЛА, за рахунок чого траєкторія спрямляється і, таким чином, не буде оптимальною [3].

Недоліком МПН з точки зору проведення розрахунків є необхідність визначення управляючого кута атаки на кожній ітерації інтегрування диференціальних рівнянь руху ЛА за допомогою нелінійного алгебраїчного рівняння. Такий же недолік мають і методи, що задають управління у вигляді прискорень, на пряму або через кривизну траєкторії [6]. Це призводить до збільшення часу розрахунку, так як дане рівняння теж має вирішуватись числовим ітеративним методом. Крім того, інколи корінь рівняння може бути не знайдений через залежність числових методів від початкового наближення, що призведе до зриву розрахунку.

Для застосування методів пропорційного керування можна було б скористатись моделлю програмного польоту із заданим кутом нахилу траєкторії, згідно з класифікацією, наведеною у [7]. Однак для застосування даного методу

одної лише програми кута нахилу траєкторії недостатньо. Причиною є великий ризик при виникненні відхилень «лягти» на паралельний курс, на якому кут нахилу траєкторії відповідає програмі, а висота польоту не відповідає необхідній.

Очевидною здається модель програмного польоту із заданою висотою, однак у наведеній у [7] класифікації вона не представлена. Причиною може бути те, що розрахувати для даної моделі точне значення необхідного кута атаки при змінній висоті чисто алгебраїчними методами неможливо. Крім того, використання однієї тільки висоти у якості первинного програмного параметра разом з методами пропорційного керування не забезпечить достатньо стійкого польоту. Більш стійкий політ може бути забезпечений шляхом пропорційно-диференціального керування [8]. При відсутності програмної диференційної складової (наприклад, кута нахилу траєкторії) коливання фактичної висоти відносно програмної, що виникатимуть при відхиленнях не будуть затухаючими.

Для задання форми траєкторії часто користуються поліномами [3, 12, 13], в тому числі з урахуванням обмежень на кут підльоту до КТП [13]. Перевагою поліномів є можливість легкого масштабування для отримання більш складних форм траєкторій шляхом підвищення ступеню поліному. Але слід зауважити, що, як правило, коефіцієнти поліномів у традиційній формі при різних ступенях аргументу відрізняються на порядки. Це в свою чергу може негативно впливати на роботу числових методів оптимізації.

При відносно помірних значеннях коефіцієнтів за допомогою поліномів неможливо забезпечити близькі до 90° кути на стартовій ділянці польоту, а також коректно передати стартову ділянку польоту в цілому. Цей факт також ускладнює процес оптимізації за допомогою числових методів.

У [3] описується модель задання траєкторії у вигляді поліному, для якої у тому числі приводиться вираз для визначення кута нахилу траєкторії. Проте описана модель побудована для системи координат з віссю x , направленою до КТП і не зручна для застосування у більш традиційних для моделювання польоту системах координат.

Також розглядаються способи побудови траєкторій за допомогою кривих Безьє [14], де управляючими параметрами виступають координати контрольних точок кривої. Криві Безьє, як і поліноми, легко масштабуються, але наявність переваг при практичному застосуванні перед поліномами потребує додаткового дослідження.

Таким чином, для розглянутих у даному розділі моделей програмного польоту характерний один із зазначених нижче недоліків:

- не задають взаємопов'язані програмні значення висоти і кута нахилу траєкторії польоту;
- не забезпечують приведення ЛА у КТП автоматично;
- не забезпечують можливість явно задавати кути старту та підльоту до КТП;
- мають різний порядок величини управляючих параметрів.

3. Мета та задачі дослідження

Метою даного дослідження є забезпечення спрощення процесу оптимізації як, власне, траєкторій польоту ТР і ЗКР, так і комплексної оптимізації ПП і тра-

екторій польоту ракет даних класів на етапах проектування. Це дасть можливість пришвидшити процес проектування ТР і ЗКР, а також покращити якість отримуваних проектних результатів.

Для досягнення мети необхідно вирішити наступні задачі:

- розробити моделі програмного польоту для розрахунку траєкторій ТР і ЗКР, які задають взаємопов'язані значення висоти і кута нахилу траєкторії у параметризованій формі, забезпечують автоматичне попадання у КТП та можливість задавати кути старту та підльоту до КТП, мають однаковий або близький порядок величин управляючих параметрів;
- проаналізувати можливість апроксимації розробленими моделями траєкторій польоту, розрахованих за допомогою інших відомих моделей;
- порівняти результати оптимізації траєкторій польоту із застосуванням відомих та розроблених моделей програмного польоту.

4. Матеріали та методи дослідження

В загальному випадку вид закону управління для побудови траєкторії ТР і ЗКР польоту вибирається на основі уявлень про вигляд типових траєкторій польоту. Єдиною відмінністю між типовими траєкторіями польоту ТР і ЗКР, з точки зору вибору виду закону управління є те, що висота КТП для ТР завжди дорівнює 0.

Відомо що функції, які задають залежності висоти та кута нахилу траєкторії від дальності (під дальністю мається на увазі ортодромна дальність) мають між собою диференційний зв'язок:

$$\frac{dH(L)}{dL} = \operatorname{tg}(\theta(L)), \quad (1)$$

де L – дальність, H – висота, θ – кут нахилу траєкторії.

Для виведення взаємопов'язаних алгебраїчних співвідношень для $H(L)$ і $\theta(L)$ можна використати два принципово протилежних підходи:

1) задати вид функції $\theta(L)$, після чого вивести такі співвідношення між параметрами функції, щоб функція $H(L)$ пройшла через початок координат $(0, 0)$ і задану кінцеву точку (H_k, L_k) (і таким чином частково врахувала початкові та необхідні кінцеві характеристики об'єкту керування) – за допомогою даного підходу були розроблені лінійні моделі;

2) задати функцію $H(L)$ у такому вигляді, щоб вона пройшла через початок координат $(0, 0)$ і задану кінцеву точку (H_k, L_k) , після чого знайти похідну функції по L – за допомогою даного підходу були розроблені поліноміальні моделі.

Білінійна модель

На прикладі білінійної моделі пояснена методика виведення співвідношень для моделей програмного польоту, так ця модель є найпростішою. Для інших моделей будуть представлені тільки готові співвідношення у розділі 5.

Нехай функція $\theta(L)$ задана кусково-лінійно і складається з двох сегментів, при цьому вид функції змінюється в деякій точці переходу з координатою $L=L_{\pi}$:

$$\theta(L) = \begin{cases} a \cdot L + b & \text{при } L \leq L_{\pi}, \\ c \cdot L + d & \text{при } L > L_{\pi}, \end{cases} \quad (2)$$

де a, b, c і d – деякі коефіцієнти, тоді:

$$\frac{dH(L)}{dL} = \begin{cases} \operatorname{tg}(a \cdot L + b) & \text{при } L \leq L_{\pi}, \\ \operatorname{tg}(c \cdot L + d) & \text{при } L > L_{\pi}. \end{cases} \quad (3)$$

Інтегруючи дані вирази за умови, що координати точки старту $L=0$ і $H=0$ отримаємо залежність:

$$H(L) = \begin{cases} \frac{1}{a} \cdot \ln \left(\frac{\cos(b)}{\cos(a \cdot L + b)} \right) & \text{при } L \leq L_{\pi}, \\ \frac{1}{a} \cdot \ln \left(\frac{\cos(b)}{\cos(a \cdot L_{\pi} + b)} \right) + \\ + \frac{1}{c} \cdot \ln \left(\frac{\cos(c \cdot L_{\pi} + d)}{\cos(c \cdot L + d)} \right) & \text{при } L > L_{\pi}. \end{cases} \quad (4)$$

Нехай θ_0 – кут нахилу траєкторії у точці старту, θ_{π} – кут нахилу траєкторії у точці переходу, θ_{κ} – кут нахилу траєкторії у КТП з координатами $L=L_{\kappa}$ і $H=H_{\kappa}$, і значення кутів відомі. Припустимо також, що нам відома координата дальності точки переходу L_{π} . Тоді значення коефіцієнтів a, b, c і d можна визначити за допомогою систем рівнянь:

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b = \theta_0 \\ a \cdot L_{\pi} + b = \theta_{\pi} \end{cases}, \begin{cases} c \cdot L_{\pi} + d = \theta_{\pi} \\ c \cdot L_{\kappa} + d = \theta_{\kappa} \end{cases} \quad (5)$$

Вирішити дані системи рівнянь відносно a, b, c і d можна методом підстановки, або матричним методом. У результаті отримаємо вирази для знаходження a, b, c і d :

$$a = \frac{\theta_{\pi} - \theta_0}{L_{\pi}}, \quad b = \theta_0, \\ c = \frac{\theta_{\kappa} - \theta_{\pi}}{L_{\kappa} - L_{\pi}}, \quad d = \frac{L_{\kappa} \cdot \theta_{\pi} - L_{\pi} \cdot \theta_{\kappa}}{L_{\kappa} - L_{\pi}}. \quad (6)$$

Для визначення координати дальності точки переходу L_{π} запишемо вираз для визначення висоти КТП H_k :

$$H_k = H(L_k) = \frac{1}{a} \cdot \ln \left(\frac{\cos(b)}{\cos(a \cdot L_{\pi} + b)} \right) + \frac{1}{c} \cdot \ln \left(\frac{\cos(c \cdot L_{\pi} + d)}{\cos(c \cdot L_k + d)} \right). \quad (7)$$

Підставивши у даний вираз вирази для a , b , c і d і виконавши необхідні математичні перетворення, отримаємо вираз для визначення L_{π} , в залежності від H_k , L_k , θ_0 , θ_{π} і θ_k :

$$L_{\pi} = \frac{(\theta_0 - \theta_{\pi}) \cdot \left[H \cdot (\theta_{\pi} - \theta_k) + L_k \cdot \ln \left(\frac{\cos(\theta_{\pi})}{\cos(\theta_k)} \right) \right]}{\theta_0 \cdot \ln \left(\frac{\cos(\theta_{\pi})}{\cos(\theta_k)} \right) + \theta_{\pi} \cdot \ln \left(\frac{\cos(\theta_k)}{\cos(\theta_0)} \right) + \theta_k \cdot \ln \left(\frac{\cos(\theta_0)}{\cos(\theta_{\pi})} \right)}. \quad (8)$$

Параметри H_k , L_k , θ_0 , θ_{π} , і θ_k для даної моделі є управляючими, а параметри L_{π} , a , b , c і d – проміжними.

Оскільки у формулі (4) значення виразу

$$\frac{1}{a} \cdot \ln \left(\frac{\cos(b)}{\cos(a \cdot L_{\pi} + b)} \right)$$

є сталим і не залежить від L , позначимо його як C , спростивши таким чином формулу (4)

$$H(L) = \begin{cases} \frac{1}{a} \cdot \ln \left(\frac{\cos(b)}{\cos(a \cdot L + b)} \right) & \text{при } L \leq L_{\pi}, \\ C + \frac{1}{c} \cdot \ln \left(\frac{\cos(c \cdot L_{\pi} + d)}{\cos(c \cdot L + d)} \right) & \text{при } L > L_{\pi}. \end{cases} \quad (9)$$

Вирази типу

$$C = \frac{1}{a} \cdot \ln \left(\frac{\cos(b)}{\cos(a \cdot L_{\pi} + b)} \right) \quad (10)$$

будемо називати допоміжними.

При такій побудові моделі траєкторії польоту крива $H(L)$ завжди проходить через точки $(0, 0)$ – початок координат і (L_k, H_k) – КТП, при $L_{\pi} > 0$.

Алгоритм практичного застосування співвідношень моделі наступний: спочатку по заданим (вхідним) значенням управляючих параметрів $H_k, L_k, \theta_0, \theta_n$, і θ_k розраховується значення проміжних параметрів, спочатку – L_n , потім – коефіцієнтів a, b, c і d , після чого значення підставляються у вирази для $H(L)$ і $\theta(L)$.

При моделюванні польоту ТР або ЗКР значення управляючого кута атаки визначається за співвідношенням

$$\alpha_n = k_H \cdot (H(L_n) - H_n) + k_\theta \cdot (\theta(L_n) - \theta_n), \quad (11)$$

де α_n – поточне значення кута атаки, k_H – коефіцієнт пропорційності управління по висоті, k_θ – коефіцієнт пропорційності управління по куту нахилу траєкторії, L_n, H_n, θ_n – поточні значення дальності, висоти і кута нахилу траєкторії польоту відповідно. Значення коефіцієнтів k_H і k_θ вибираються з точки зору забезпечення прийнятних жорсткості задачі та допустимого кінцевого промаху. У рамках даного дослідження $k_H=0,02$, а $k_\theta=10$.

За аналогічним принципом автором були розроблені трилінійна, біпараболічна та трипараболічна моделі. Дві останні моделі задають форму траєкторії у вигляді двох та трьох параболічних сегментів відповідно та мають аналогічні управляючі параметри. Вирази для параболічних моделей є простішими у порівнянні з лінійними моделями. Однак через описані у розділі 6 причини параболічні моделі не представлені.

Вирази для залежностей $H(L)$ поліноміальної моделі отримані шляхом додавання до лінійної функції, що проходить через точки $(0, 0)$ та (L_k, H_k) поліноміальної функції, що проходять через точки $(0, 0)$ та $(L_k, 0)$.

Описаний у розділі 2 недолік поліноміальної моделі усунений шляхом ділення аргументна (L) відповідного ступеня на значення дальності до КТП, піднесене до такого ж ступеня. Така форма є найбільш зручною для практичного застосування при вирішенні задач оптимізації траєкторій і ПП ЗКР та ТР.

Для усунення недоліка щодо забезпечення коректного управління стартовою ділянкою польоту у поліноміальній моделі розроблені два модифікованих варіанта шляхом введення допоміжних доданків – ступеневого та дробно-раціонального.

Оцінка ефективності застосування розроблених моделей програмного польоту була проведена двома способами:

- оцінкою можливості апроксимації за допомогою розроблених моделей деяких заздалегідь розрахованих із застосуванням відомих моделей опорних траєкторій – це характеризує відповідність моделі фізиці польоту;

- порівнянням екстремальних значень цільових функцій для розроблених моделей, та для траєкторій, розрахованих із застосуванням відомих моделей – це характеризує відповідність моделі своєму цільовому призначенню.

Моделювання польоту проводилось для гіпотетичної ЗКР великої дальності дії за допомогою системи диференціальних рівнянь руху ЛА у атмосфері сферичної необертаючоїся планети [15]. Стартова маса ЗКР 1055 кг. Маршовий двигун ЗКР твердопаливний дворежимний, маса твердого палива 580 кг, паливо

сумішеве типу НТРВ, питомий імпульс тяги у пустоті 260 с. ЗКР виконана за нормальною аеродинамічною схемою з розташуванням крил у районі центру мас та розташуванням аеродинамічних рулів у хвостовій частині.

Для проведення порівняння застосовувались траєкторії, розраховані за допомогою методу задання закону зміни кута атаки і МПН.

Залежність кута атаки від часу задавалась у кусково-постійній формі

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_1 & \text{при } t \leq t_1, \\ \alpha_2 & \text{при } t_1 < t \leq t_2, \\ \alpha_3 & \text{при } t > t_2, \end{cases} \quad (12)$$

де α_1 , α_2 і α_3 – значення кута атаки у відповідні проміжки часу, α_1 , α_2 , α_3 , t_1 і t_2 – управляючі параметри.

Для МПН використовувався змінний в залежності від похилої дальності до цілі коефіцієнт пропорційності, що задається трьома лінійними сегментами за формулою

$$k_p(L_s) = \min \left(\max \left(\frac{L_s - l_1 \cdot L_{s0}}{(l_2 - l_1) \cdot L_{s0}} \times \left(\frac{L_{s0} - l_1 \cdot L_{s0}}{L_{s0}} \right); k_2 \right); \left(1 + (k_0 - 1) \cdot \frac{L_{s0} - L_s}{L_{s0}} \right) \right), \quad (13)$$

де k_p – коефіцієнт пропорційності МПН, L_s – похила дальність до цілі, k_0 , k_1 і k_2 – деякі позитивні числа, L_{s0} – значення похилої дальності до цілі в момент пуску.

Для проведення рівноцінного порівняння кількості управляючих параметрів для всіх (включаючи МПН та метод задання закону зміни кута атаки) моделей була прийнята рівною кількості управляючих параметрів для трилінійної моделі, тобто, рівною п'яти без урахування H_k і L_k . Винятком є білінійна та біпараболічна моделі, для яких максимально можлива кількість управляючих параметрів без урахування H_k і L_k складає три.

Апроксимація виконувалась за допомогою методу найменших квадратів [16, 17].

У якості критеріїв оцінки якості апроксимації традиційно застосовуються:

– середня похибка апроксимації (MAPE) [18, 19] (табл. 1)

$$\text{MAPE} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left| \frac{H_{ri} - H_a(L_{ri})}{H_{ri}} \right| \cdot 100\%; \quad (14)$$

– коефіцієнт детермінації (R^2) [16, 17] (табл. 2)

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (H_{ri} - H_a(L_{ri}))^2}{\sum_{i=1}^n (H_{ri} - \overline{H_r})^2}. \quad (15)$$

де n – кількість точок траєкторії, що апроксимується, H_r – значення висот точок траєкторії, що апроксимується, L_r – значення дальностей точок траєкторії, що апроксимується, $H_a(L_r)$ – значення апроксимуючої функції у точках L_r , верхня риска – середнє арифметичне значення.

Оптимізація траєкторій польоту ЗКР, результати якої наведені у табл. 3, проводилась за допомогою генетичного алгоритму.

5. Результати розробки моделей програмного польоту

5.1. Співвідношення моделей програмного польоту

Трилінійна модель.

Дана модель є масштабуванням білінійної моделі і складається із трьох сегментів. Крім аналогічних білінійній моделі управляючих параметрів H_k , L_k , θ_0 , і θ_k додаються також:

- $\theta_{п1}$ – кут нахилу траєкторії у першій точці переходу;
- $\theta_{п2}$ – кут нахилу траєкторії у другій точці переходу;
- k_L – коефіцієнт відношення координати дальності другої точки переходу ($L_{п2}$) до координати дальності першої точки переходу ($L_{п1}$), $k_L > 1$.

Управляючі параметри: H_k , L_k , θ_0 , $\theta_{п1}$, $\theta_{п2}$, θ_k і k_L . Проміжні параметри: $L_{п1}$, $L_{п2}$, a_1 , a_2 , a_3 , b_1 , b_2 , b_3 .

Перша група допоміжних виразів:

$$\begin{aligned} \lambda &= \theta_{п2} \cdot \ln \left(\frac{\cos(\theta_{п1})}{\cos(\theta_k)} \right) - \theta_{п1} \cdot \ln \left(\frac{\cos(\theta_{п2})}{\cos(\theta_k)} \right) - \theta_k \cdot \ln \left(\frac{\cos(\theta_{п1})}{\cos(\theta_{п2})} \right), \\ \vartheta &= \theta_{п1} \cdot \ln \left(\frac{\cos(\theta_0)}{\cos(\theta_{п2})} \right) - \theta_{п2} \cdot \ln \left(\frac{\cos(\theta_0)}{\cos(\theta_{п1})} \right) - \theta_0 \cdot \ln \left(\frac{\cos(\theta_{п1})}{\cos(\theta_{п2})} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Координати точок переходу:

$$\begin{aligned} L_{п1} &= \frac{(\theta_{п1} - \theta_{п2}) \cdot \left[H_k - \frac{L_k}{(\theta_k - \theta_{п2})} \cdot \ln \left(\frac{\cos(\theta_{п2})}{\cos(\theta_k)} \right) \right]}{\lambda \cdot \frac{k_L}{(\theta_k - \theta_{п2})} - \vartheta \cdot \frac{1}{(\theta_0 - \theta_{п1})}}, \\ L_{п2} &= k_L \cdot L_{п1}. \end{aligned} \quad (17)$$

Значення коефіцієнтів:

$$a_1 = \frac{\theta_{n1} - \theta_0}{L_{n1}}, \quad a_2 = \frac{\theta_{n1} - \theta_{n2}}{L_{n1} - L_{n2}}, \quad a_3 = \frac{\theta_k - \theta_{n2}}{L_k - L_{n2}},$$

$$b_1 = \theta_0, \quad b_2 = \frac{L_{n1} \cdot \theta_{n2} - L_{n2} \cdot \theta_{n1}}{L_{n1} - L_{n2}}, \quad b_3 = \frac{L_k \cdot \theta_{n2} - L_{n2} \cdot \theta_k}{L_k - L_{n2}}. \quad (18)$$

Друга група допоміжних виразів:

$$C_1 = \frac{1}{a_1} \cdot \ln \left(\frac{\cos(b_1)}{\cos(a_1 \cdot L_{n1} + b_1)} \right),$$

$$C_2 = C_1 + \frac{1}{a_2} \cdot \ln \left(\frac{\cos(a_2 \cdot L_{n1} + b_2)}{\cos(a_2 \cdot L_{n2} + b_2)} \right). \quad (19)$$

Залежності для $H(L)$ і $\theta(L)$:

$$H(L) = \begin{cases} \frac{1}{a_1} \cdot \ln \left(\frac{\cos(b_1)}{\cos(a_1 \cdot L + b_1)} \right) & \text{при } L \leq L_{n1}, \\ C_1 + \frac{1}{a_2} \cdot \ln \left(\frac{\cos(a_2 \cdot L_{n1} + b_2)}{\cos(a_2 \cdot L + b_2)} \right) & \text{при } L_{n1} < L \leq L_{n2}, \\ C_2 + \frac{1}{a_3} \cdot \ln \left(\frac{\cos(a_3 \cdot L_{n2} + b_3)}{\cos(a_3 \cdot L + b_3)} \right) & \text{при } L > L_{n2}, \end{cases}$$

$$\theta(L) = \begin{cases} a_1 \cdot L + b_1 & \text{при } L \leq L_{n1}, \\ a_2 \cdot L + b_2 & \text{при } L_{n1} < L \leq L_{n2}, \\ a_3 \cdot L + b_3 & \text{при } L > L_{n2}. \end{cases} \quad (20)$$

Поліноміальна модель.

Управляючі параметри: H_k , L_k , і A – вектор коефіцієнтів поліному, який складається з n елементів, при цьому ступінь поліному складає $n+1$.

Залежності для $H(L)$ і $\theta(L)$:

$$H(L) = \frac{H_k}{L_k} \cdot L + (L - L_k) \cdot \sum_{i=1}^n A_i \cdot \left(\frac{L}{L_k} \right)^i,$$

$$\theta(L) = \arctg \left[\frac{H_k}{L_k} + \sum_{i=1}^n A_i \cdot \left(\frac{L}{L_k} \right)^i + \left(\frac{L}{L_k} + 1 \right) \cdot \sum_{i=1}^n i \cdot A_i \cdot \left(\frac{L}{L_k} \right)^{i-1} \right]. \quad (21)$$

Кут θ_0 пов'язаний з коефіцієнтом A_1 залежністю

$$A_1 = \frac{H_k}{L_k} - \operatorname{tg}(\theta_0), \quad (22)$$

а θ_k з вектором A – залежністю

$$\sum_{i=1}^n A_i = \operatorname{tg}(\theta_k) - \frac{H_k}{L_k}. \quad (23)$$

Якщо кути θ_0 і θ_k потрібно задати одночасно, то залежність (23) матиме вигляд:

$$\sum_{i=2}^n A_i = \operatorname{tg}(\theta_k) - \frac{H_k}{L_k} - A_1. \quad (24)$$

Поліноміально-ступенева модель.

У поліноміально-ступеневій моделі (ПСМ) допоміжний доданок має вигляд ступеневої функції, відповідно до рекомендацій, наведених у [Ошибка! Источник ссылки не найден.]. Зміною значень параметрів a і k забезпечується управління стартовою ділянкою, при цьому $k > 1$, $a > 0$.

Управляючі параметри: H_k, L_k, A, k, a .

Залежності для $\theta(L)$ і $H(L)$:

$$\theta(L) = \arctg \left[\frac{\frac{H_k}{L_k} + \sum_{i=1}^n A_i \cdot \left(\frac{L}{L_k} \right)^i + \left(\frac{L}{L_k} + 1 \right) \sum_{i=1}^n i \cdot A_i \cdot \left(\frac{L}{L_k} \right)^{i-1}}{-\frac{a}{L_k} \cdot \left(\frac{L}{L_k} \right)^{\frac{1}{k}-1} \cdot \left(L + \frac{L - L_k}{k} \right)} \right],$$

$$H(L) = \frac{H_k}{L_k} \cdot L + (L - L_k) \cdot \left[\sum_{i=1}^n A_i \cdot \left(\frac{L}{L_k} \right)^i - a \cdot \left(\frac{L}{L_k} \right)^{\frac{1}{k}} \right]. \quad (25)$$

При необхідності задати θ_k (θ_0 завжди дорівнює 90°) необхідно скористатися залежністю:

$$\sum_{i=1}^n A_i = \operatorname{tg}(\theta_k) + a - \frac{H_k}{L_k}. \quad (26)$$

Слід зауважити, що похідна від ступеневої функції у точці $L=0$ дорівнює ∞ (має сингулярність), що може представляти проблему при роботі у деяких математичних пакетах (наприклад, MathCAD (США) і MATLAB (США)). Під час виконання даного дослідження такі рекомендації теж мали місце.

Поліноміально-раціональна модель.

У поліноміально-раціональній моделі (ПРМ) допоміжний доданок має вигляд дробно-раціональної функції. Для управління стартовою ділянкою також використовуються параметри a і k , при цьому для більшості ситуацій $-3 < k < 0$, $a > 0$, оскільки при більших значеннях k величина доданку наближається до L , а при менших схилення на стартовій ділянці стає надмірно різким.

Управляючі параметри: H_k , L_k , A , k , a .

Залежності для $H(L)$ і $\theta(L)$:

$$H(L) = \frac{H_k}{L_k} \cdot L + (L - L_k) \cdot \left[\sum_{i=1}^n A_i \cdot \left(\frac{L}{L_k} \right)^i - a \cdot \frac{L \cdot (1 + 10^k)}{L + 10^k \cdot L_k} \right],$$

$$\theta(L) = \operatorname{arctg} \left[\frac{\frac{H_k}{L_k} + \sum_{i=1}^n A_i \cdot \left(\frac{L}{L_k} \right)^i + \left(\frac{L}{L_k} + 1 \right) \sum_{i=1}^n i \cdot A_i \cdot \left(\frac{L}{L_k} \right)^{i-1} - \frac{a}{L + 10^k \cdot L_k} \times}{\times \left[(1 + 10^k) \cdot \left(L - (L - L_k) \cdot \left(\frac{L}{L + 10^k \cdot L_k} - 1 \right) \right) \right]} \right]. \quad (27)$$

При необхідності задати кут θ_0 слід скористатися залежністю

$$A_1 = \frac{H_k}{L_k} - \operatorname{tg}(\theta_0) + a \cdot \left(1 + \frac{1}{10^k} \right), \quad (28)$$

при необхідності задати кут θ_k – аналогічною ПСМ залежністю (26), а при необхідності задати θ_0 і θ_k одночасно залежність матиме вигляд:

$$\sum_{i=2}^n A_i = \operatorname{tg}(\theta_k) + a - \frac{H_k}{L_k} - A_1. \quad (29)$$

Кут старту у ПРМ, на відміну від ПСМ, де кут старту завжди дорівнює 90° , може приймати значення близькі до 90° , однак 90° ніколи не дорівнює.

5. 2. Результати апроксимації опорних траєкторій моделями програмного польоту

Наведені далі (рис. 1, табл. 1-3) умовні позначення траєкторій розшифровуються наступним чином:

– велика літера – визначає тип траєкторії: «V» – оптимальна траєкторія за критерієм максимальної швидкості у КТП, «Т» – оптимальна траєкторія за критерієм мінімального часу польоту у КТП, «В» – балістична траєкторія, «І» – нетипова траєкторія польоту;

– число – визначає координати кінцевої тачки по дальності і висоті: «13» – $L_k=13$ км, $H_k=0,02$ км, «70» – $L_k=70$ км, $H_k=2$ км, «200» – $L_k=200$ км, $H_k=10$ км;

– мала літера – визначає тип опорної моделі програмного польоту: «а» – закон зміни кута атаки, «р» – МПН.

У табл. 1-3 кольорове позначення клітинок слугує для порівняння якості результату: червоний колір – порівняно поганий результат, зелений колір – порівняно хороший результат.

Рис. 2-4 дозволяють візуально оцінювати якість апроксимації траєкторій.

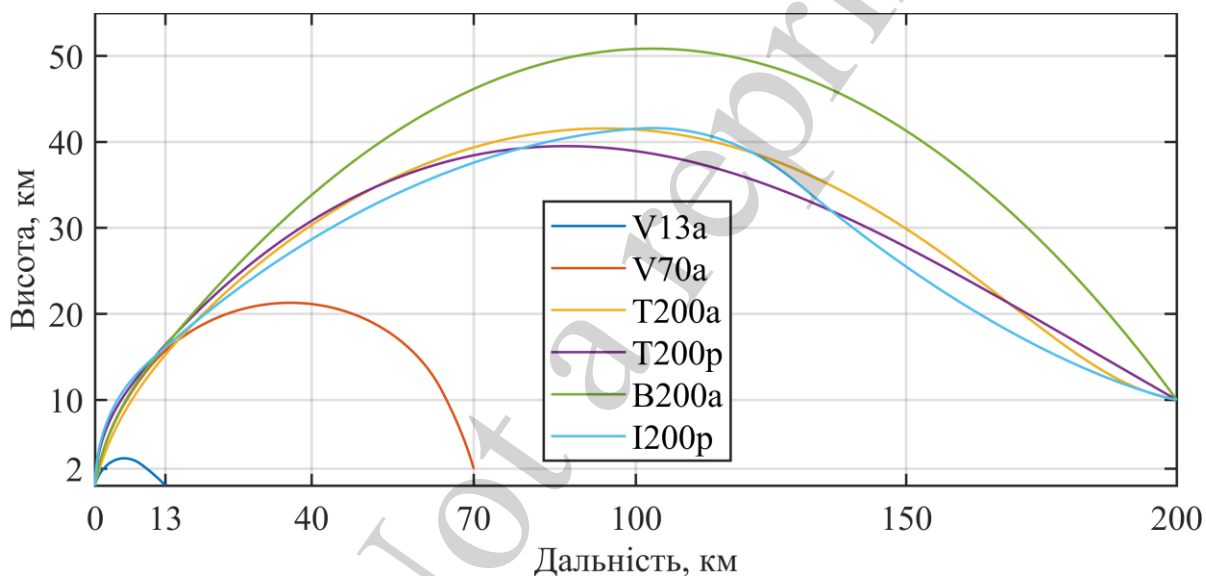


Рис. 1. Опорні траєкторії польоту ЗКР

Таблиця 1

Середня похибка апроксимації (MAPE)

Модель траєкторії	Опорна траєкторія					
	V13a	V70a	T200a	T200p	B200a	I200p
Білінійна	7,644 %	6,878 %	7,339 %	8,082 %	1,964 %	8,949 %
Біпараболічна	9,174 %	9,654 %	9,258 %	8,789 %	1,288 %	9,668 %
Трилінійна	1,721 %	2,187 %	1,223 %	1,697 %	1,398 %	3,484 %
Трипараболічна	2,419 %	3,103 %	1,646 %	2,461 %	0,694 %	3,669 %
Поліноміальна	3,674 %	2,875 %	2,835 %	4,707 %	3,261 %	5,167 %
ПСМ	1,203 %	2,244 %	2,162 %	0,775 %	0,956 %	2,284 %
ПРМ	1,531 %	1,588 %	2,031 %	0,607 %	0,336 %	3,598 %

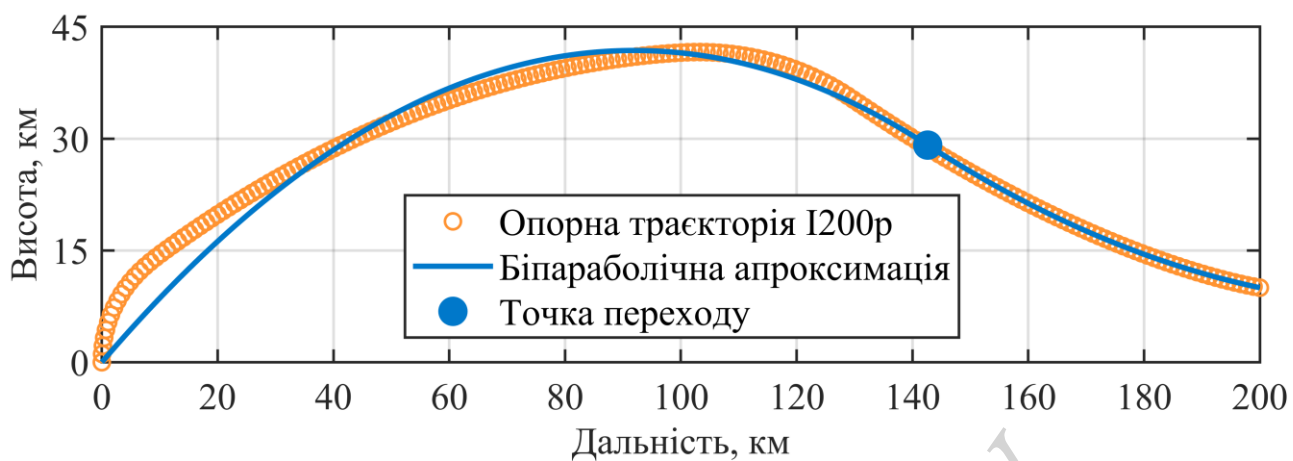


Рис. 2. Приклад неякісної апроксимації траєкторії I200p білінійною моделлю

Таблиця 2

Коефіцієнт детермінації (R^2) апроксимованих траєкторій

Модель траєкторії	Опорна траєкторія					
	V13a	V70a	T200a	T200p	B200	I200
Білінійна	0,9905	0,9761	0,9865	0,9811	0,9991	0,9718
Біпараболічна	0,9867	0,9504	0,9773	0,9771	0,9999	0,9642
Трилінійна	0,9996	0,9992	0,9988	0,9993	0,9991	0,9908
Трипараболічна	0,9991	0,9983	0,9995	0,9986	0,99995	0,9924
Поліноміальна	0,9983	0,9987	0,9983	0,9935	0,9981	0,9929
ПСМ	0,9998	0,9988	0,9987	0,9999	0,9999	0,9966
ПРМ	0,9998	0,9989	0,99904	0,99995	0,99998	0,996

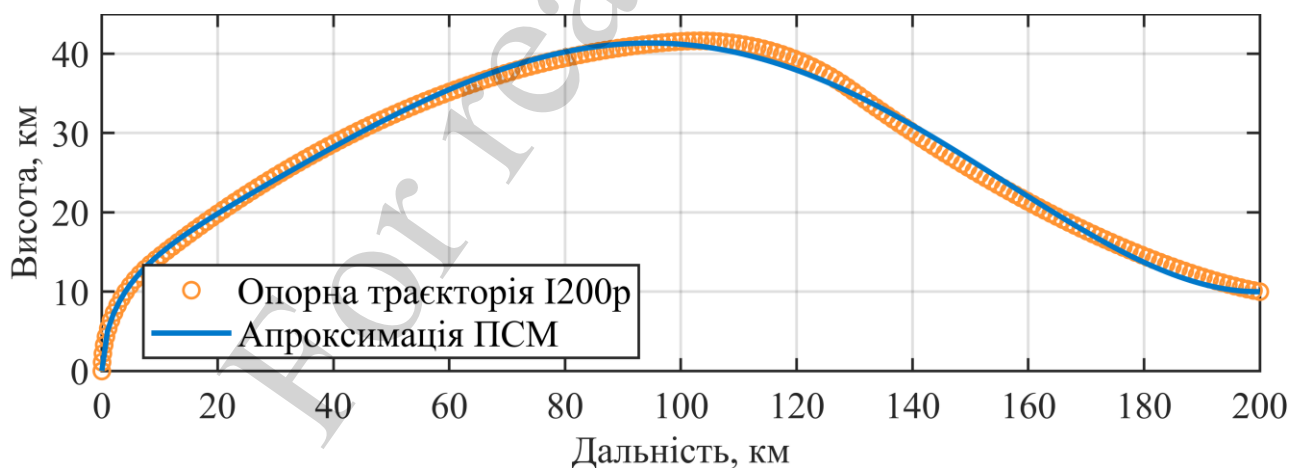


Рис. 3. Приклад якісної апроксимації траєкторії I200p ПСМ

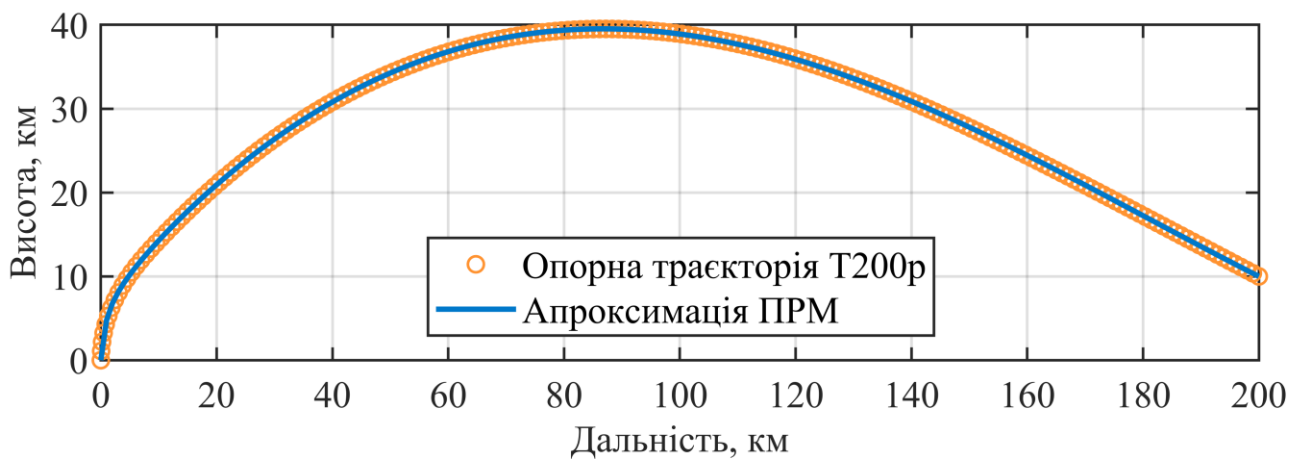


Рис. 4. Приклад майже ідеальної апроксимації траєкторії T200p ПРМ

5. 3. Результати оптимізації траєкторій із застосуванням відомих та розроблених моделей програмного польоту

Результати оптимізації траєкторій польоту ЗКР великої дальності дії, описаної у розділі 4, з використанням різних моделей програмного польоту наведені у табл. 3.

Таблиця 3
Екстремальні значення цільових функцій

Модель	Цільова функція/розрахунковий випадок					
	Мін. час, с			Макс. швидкість, м/с		
	T13	T70	T200	V13	V70	V200
Кут атаки	18,221	78,592	193,963	1214,04	803,165	1099,14
МПН	18,554	79,866	200,369	1216,97	796,232	1066,48
Білінійна	18,266	78,622	202,722	1207,63	796,849	1104,68
Біпараболічна	18,268	78,782	206,662	1203,92	779,135	982,65
Трилінійна	18,230	78,609	196,619	1209,67	805,480	1120,40
Трипараболічна	18,269	78,668	198,035	1208,37	795,642	1100,68
Поліноміальна	18,272	78,596	197,617	1214,29	807,389	1085,88
ПСМ	18,199	78,382	194,956	1218,22	806,513	1111,73
ПРМ	18,201	78,409	194,732	1215,70	803,492	1131,39

Рис. 5 дозволяє візуально оцінити подібність оптимальних за критерієм максимальної кінцевої швидкості польоту траєкторій (колонка «V70» табл. 3), отриманих за допомогою відомих і розроблених моделей програмного польоту.

Можна констатувати, що отримані траєкторії, зображені на рис. 5, досить близькі до деякої теоретично оптимальної траєкторії польоту.

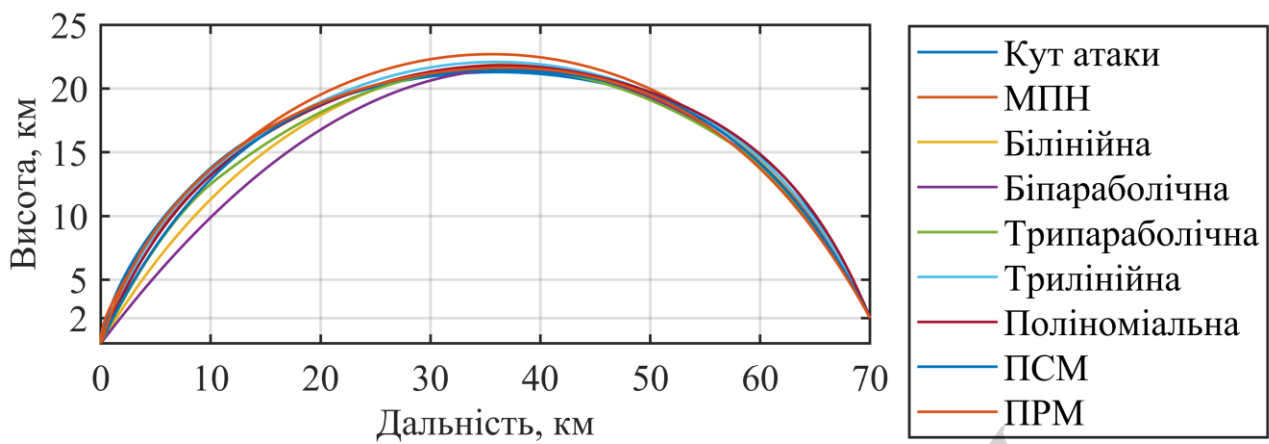


Рис. 5 Оптимальні за критерієм максимальної кінцевої швидкості польоту траєкторії V70 для різних моделей

6. Обговорення результатів розробки та дослідження відповідності цільовому призначенню моделей програмного польоту

При проведенні порівняльного аналізу, результати якого наведені в табл. 1–3, лінійні моделі у порівнянні з параболічними показали кращі результати. За відсутності переваг параболічні моделі не рекомендуються для практичного застосування, а їх вирази не представлені у даній роботі.

Перевагою лінійних моделей програмного польоту такого виду є мінімальна кількість управляючих параметрів. Всі управляючі параметри мають фізичний зміст: крім очевидних – координат КТП (L_k і H_k), задаються також кути нахилу траєкторії у точках старту, переходів і КТП. Це дозволяє при необхідності під час проведення оптимізації траєкторій польоту задати обмеження на значення кутів старту та підльоту до цілі у явному вигляді.

Вважається, що значення середньої похибки апроксимації менше п'яти відсотків говорить про хорошу відповідність апроксимуючої моделі фізиці процесу. Середня похибка апроксимації опорних траєкторій (рис. 1) для трьохсегментних та поліноміальних моделей не перевищує 5 %. Винятком є лише апроксимація поліноміальною моделлю нестандартної траєкторії «I200p», яка складає 5,167 % (табл. 1).

Серед розроблених моделей програмного польоту сегментного типу трилінійна модель показала найкращі результати, причому у більшості кращі за поліноміальну модель. Тому трилінійну модель доцільно рекомендувати для подальшого застосування при проведенні досліджень.

Наявність зламів функції $\theta(L)$ лінійних сегментних моделей не представляє проблеми при моделюванні, так як фактичні реалізовані значення кута нахилу траєкторії згладжуються за рахунок динамічних характеристик ЛА.

З точки зору можливості апроксимації заздалегідь розрахованих опорних траєкторій модифіковані поліноміальні моделі показали практично однакові результати (табл. 1, 2). З точки зору порівнянням екстремальних значень цільових функцій для розрахованих траєкторій, ПСМ показала трохи кращий результат ніж ПРМ (табл. 3). Проте при застосуванні ПСМ виникають деякі труднощі під час проведення розрахунків. Вирішити дані труднощі способом, який би не

призводив до відчутного збільшення часу розрахунку, у рамках даного дослідження не вдалося. Тому за результатами даного дослідження серед розглянутих поліноміальних моделей для подальшого практичного застосування рекомендується надавати перевагу ПРМ.

Модифіковані поліноміальні моделі показали найкращі результати за рахунок можливості окремо управляти стартовою ділянкою польоту.

У порівнянні із застосованими існуючими моделями програмного польоту, модель задання закону зміни кута атаки лише у поодинокому випадку (Т200) показала найкращий результат при оптимізації (табл. 1), але відмінність від результату, показаного ПРМ, складає усього 0,4 % (табл. 3).

Про хорошу відповідність фізиці польоту також говорить візуальна близькість траєкторій (рис. 5), отриманих за допомогою різних моделей.

Отримані результати пояснюються:

- принципом побудови моделей програмного польоту, які за рахунок задання взаємопов'язаних програмних значень висоти і кута нахилу траєкторії польоту забезпечують стійкий політ при використанні пропорційно-диференційного керування;

- різноманіттям розроблених варіантів моделей програмного польоту при проведенні дослідження (всього було розроблено сім моделей) – це дозволило провести комплексне порівняння і визначити, які моделі варто, а які не варто рекомендувати для подальшого практичного застосування.

Задання взаємопов'язаних програмних значень висоти і кута нахилу траєкторії польоту є основною відмінністю розроблених моделей програмного польоту від представлених у [7, 12]. Основною відмінністю розробленої поліноміально-раціональної моделі від представлених у [12, 13] є використання дробно-раціонального доданка для забезпечення управління стартовою ділянкою польоту.

Білінійну модель рекомендується застосовувати лише для оціночних розрахунків, коли результат необхідно отримати максимально швидко, оскільки мінімальна кількість управляючих параметрів робить процес оптимізації максимально швидким. Трилінійну модель рекомендується застосовувати тоді, коли необхідно задати обмеження на значення кутів старту і підльоту до цілі у явному вигляді. В усіх інших випадках рекомендується застосовувати модифіковані поліноміальні моделі.

Слід зауважити, що не всі траєкторії із множини здаваних моделями можуть бути реалізовані ЗКР або ТР через скінченні маневрені можливості. Однак у процесі числового моделювання польоту такі траєкторії (з огляду на те, що вони не задовольняють певним обмеженням) виявляються і виключаються з розгляду.

Основним обмеженням при застосуванні розроблених моделей програмного польоту є задання програмного руху ракет лише у вертикальній площині (площині стрільби). Таким спрощенням традиційно користуються на етапах проектування. Моделі програмного бокового руху необхідно розробляти окремо. Крім того, розроблені моделі призначені для задання руху високоманеврених ракет у атмосфері по аеробалістичним траєкторіям. Для ракет з обмеженою аеродинамічно обумовленою маневреністю необхідно використовувати принципово інші моделі програмного польоту.

Основним недоліком даного дослідження можна вважати те, що всі моделі (з метою спрощення) були розроблені для нульових координат точки старту. Подальший розвиток даного дослідження може полягати в усуненні даного недоліка. Таке доопрацювання дозволить використовувати моделі у задачах оптимізації траєкторій польоту авіаційних ракет типу «повітря-земля», а також корегування польотного завдання під час польоту (перенацілювання).

7. Висновки

1. Розроблено ряд моделей програмного польоту ТР і ЗКР, що задають взаємопов'язані значення програмних висоти і кута нахилу траєкторії та забезпечують автоматичне попадання у КТП. Розроблені моделі мають мінімальну кількість управляючих параметрів, простий алгебраїчний вигляд і дозволяють задавати обмеження на кути старту та підльоту до цілі. Розроблені моделі представлені у готовій формі для практичного застосування у задачах оптимізації як, власне, траєкторій польоту ТР і ЗКР, так і комплексної оптимізації ПП і траєкторій польоту ракет даних класів на етапах проектування.

2. Проаналізовано можливості апроксимації за допомогою розроблених моделей програмного польоту деяких заздалегідь розрахованих із застосуванням інших відомих моделей опорних траєкторій. Для більшості моделей в усіх розглянутих випадках величина середньої похибки апроксимації не перевищує 5 %, що є хорошим результатом. Для трилінійної і модифікованих поліноміальних моделей цей показник не перевищує 3,6 %, що пояснюється можливістю коректно задавати стартову ділянку польоту. Такий результат дозволяє рекомендувати трилінійну та модифіковані поліноміальні моделі для подальшого практичного застосування.

3. Порівняно екстремальні значення цільових функцій для траєкторій, розрахованих за розробленими моделями, та для траєкторій, розрахованих із застосуванням інших відомих моделей. Аналогічно до аналізу апроксимації, найкращі результати показали трилінійна та модифіковані поліноміальні моделі завдяки тим же особливостям. Лише у поодинокому випадку відома модель задання закону зміни кута атаки показала найкращий результат. Такий результат підтверджує рекомендацію щодо подальшого практичного застосування трилінійної та модифікованих поліноміальних моделей.

Література

1. Surface-to-air missile. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Surface-to-air_missile
2. Tactical ballistic missile. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Tactical_ballistic_missile
3. Голубев, И. С., Светлов, В. Г. (Ред.) (2001). Проектирование зенитных управляемых ракет. Москва: Изд-во МАИ, 732.
4. Lee, E. B., Marcus, L. (1967). Foundations of Optimal Control Theory. John Wiley & Sons, 576.

5. Wang, F. B., Dong, C. H. (2013). Fast Intercept Trajectory Optimization for Multi-stage Air Defense Missile Using Hybrid Algorithm. *Procedia Engineering*, 67, 447–456. doi: <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2013.12.045>
6. Pharpata, P., Pepy, R., Herisse, B., Bestaoui, Y. (2013). Missile trajectory shaping using sampling-based path planning. 2013 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. doi: <https://doi.org/10.1109/iro.2013.6696713>
7. Романова, И. К. (2017). Траектории полета летательных аппаратов. Москва: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 152.
8. Phillips, C. L., Parr, J. M. (2011). *Feedback Control Systems*. Pearson.
9. Романова, И. К. (2014). Математические модели управляемого движения летательных аппаратов. Москва: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 112.
10. Yanushevsky, R. T. (2018). *Modern missile guidance*. CRC Press, 341. doi: <https://doi.org/10.1201/9781351202954>
11. Zaikang, Q., Defu, L. (2019). *Design of Guidance and Control Systems for Tactical Missiles*. CRC Press, 254. doi: <https://doi.org/10.1201/9780429291203>
12. Даркин, И. И. (1973). Основы проектирования беспилотных летательных аппаратов с учетом экономической эффективности. Москва: Машиностроение.
13. Subchan, S. (2007). Trajectory Shaping of Surface-to-Surface Missile with Terminal Impact Angle Constraint. *Makara Journal of Technology*, 11 (2), 65–70. doi: <https://doi.org/10.7454/mst.v11i2.527>
14. Mohamadifard, A., Naghash, A. (2011). Midcourse Trajectory Shaping for Air and Ballistic Defence Guidance, Using Bezier Curves. *JAST*, 8 (2), 87–95.
15. Vinh, N. X., Busemann, A., Culp, R. D. (1980). *Hypersonic and planetary entry flight mechanics*. University of Michigan Press, 367.
16. Kleijnen, J. P. C. (2008). *Design and Analysis of Simulation Experiments*. Springer Science+Business Media. doi: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-71813-2>
17. Montgomery, D. C., Peck, E. A., Vining, G. G. (2012). *Introduction to linear regression analysis*. John Wiley & Sons, 672.
18. Tofallis, C. (2015). A better measure of relative prediction accuracy for model selection and model estimation. *Journal of the Operational Research Society*, 66 (8), 1352–1362. doi: <https://doi.org/10.1057/jors.2014.103>
19. De Myttenaere, A., Golden, B., Le Grand, B., Rossi, F. (2016). Mean Absolute Percentage Error for Regression Models. *Neurocomputing*, 192, 38–48. doi: <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2015.12.114>